

具有集间低相关性的完全互补码集构造法

李玉博¹, 门鑫宇¹, 高印芝², 刘 凯¹

(1. 燕山大学信息科学与工程学院河北省信息传输与信号处理重点实验室, 河北秦皇岛 066004;
2. 河北师范大学数学科学学院河北省计算数学与应用重点实验室, 河北石家庄 050000)

摘 要: 为解决传统互补序列集中序列数目受限的问题, 近年来有学者提出集间低相关性完全互补码(CCC, Complete Complementary Code)的概念. 集间低相关性的完全互补码具有良好的非周期自相关和互相关特性, 作为多小区多载波码分多址(MC-CDMA, Multi-Carrier Code Division Multiple Access)通信系统中的扩频码可有效消除小区内的干扰, 同时也可以抑制小区间的干扰. 该文提出两类具有集间低相关性的完全互补码集的构造方法, 得到的序列集具有以下特性: (1) 每个码集都是一个参数为 (N, N, N) -CCC 的完全互补码集; (2) 不同集合的互补序列具有低相关性. 将多个完全互补码集合并, 可以得到参数达到渐进最优的准互补序列集(QCSS, Quasi-Complementary Sequence Set).

关键词: 互补序列集; 完全互补码; 准互补序列; 渐进最优; 集间互相关; 多载波码分多址系统

中图分类号: TN911.2

文献标识码: A

文章编号: 0372-2112(2021)12-2357-09

电子学报 URL: <http://www.ejournal.org.cn>

DOI: 10.12263/DZXB.20201307

Constructions of Complete Complementary Code Sets With Low Inter-Set Cross-Correlation

LI Yu-bo¹, MEN Xin-yu¹, GAO Yin-zhi², LIU Kai¹

(1. School of Information Science and Engineering, Yanshan University, Hebei Key Laboratory of Information Transmission and Signal Processing, Qinhuangdao, Hebei 066004, China;

2. School of Mathematical Sciences, Hebei Normal University, Hebei Key Laboratory of Computational Mathematics and Application, Shijiazhuang, Hebei 050000, China)

Abstract: In order to solve the problem of the limited number of sequences in the traditional complementary sequence sets, some scholars have proposed the concept of complete complementary code sets(CCCs) with low inter-set cross-correlation in recent years. Complete complementary code sets with low inter-set cross-correlation have perfect aperiodic auto-correlation and cross-correlation properties. As the spreading code in the multi-cell MC-CDMA communication system, CCCs can effectively eliminate intra-cell interference and suppress inter-cell interference. Two constructions of complete complementary code sets with low inter-set correlation are developed, and the resultant complementary sequence sets have the following properties: (1) each set is a complete complementary code set with parameters (N, N, N) -CCC; (2) complementary sequences from different sets have low correlation functions. Finally, an asymptotically optimal quasi-complementary sequence set is obtained when these multiple complete complementary code sets are combined.

Key words: complementary sequence sets; complete complementary codes; quasi-complementary sequence sets; asymptotically optimal; inter-set cross-correlation; MC-CDMA system

1 引言

1951年, Golay 提出了 Golay 互补对^[1]的概念, 即一对序列的异相非周期自相关和为零. Tseng 和 Liu 等人将这一概念推广从而得到了互补序列的概念^[2]. 随后 Suehiro 和 Hatori 提出了相互正交的互补码集(MOCCS,

Mutually Orthogonal Complementary Code Set)^[3]. MOCCS 因为其理想的相关性已经在雷达波形设计^[4], 信道估计^[5,6]以及降低峰均功率比^[7]等方面得到了广泛的应用, 并且在异步 MC-CDMA 中可以在理论上完全消除多径干扰(MPI, Multi-Path Interference)和多址干扰

收稿日期: 2020-11-18; 修回日期: 2021-04-16; 责任编辑: 覃怀银

基金项目: 河北省自然科学基金(No.F2020203043); 河北省高等学校科学技术研究项目(No.ZD2021105, No.ZD2020179)

(MAI, Multi-Access Interference). MOCCS-MC-CDMA 系统中每个互补序列都将分配给一个特定的用户,互补序列的多个子序列对应调制到多个子载波信道上,最后将时域信号叠加发射出去.由此可见,互补序列集中序列数目决定了系统中用户数目的大小.然而,根据理论界限可知,传统的 MOCCS 序列集中互补序列数目不大于每条互补序列所包含的子序列数目^[8],这意味着在时域扩频 MC-CDMA 系统中,用户数目不大于子载波数目.为增加集合中的互补序列数目,进一步扩展系统用户数,学者们提出了低相关区互补序列集(LCZ-CSS, Low Correlation Zone Complementary Sequence Set)^[9,10]和零相关区互补序列集(ZCZ-CSS, Zero Correlation Zone Complementary Sequence Set)^[11,13]. LCZ-CSS 相关函数旁瓣值在零偏移附近一个区域内很低,当相关幅度为零时,LCZ-CSS 就成为了 ZCZ-CSS.

2013 年 Liu 等人^[14]提出了 QCSS 的概念,这种序列集参数可以突破传统正交互补码集参数理论界限的限制,具有更多的序列数目,因此在 MC-CDMA 系统中可以容纳更多的用户.目前大容量低相关的 QCSS 构造研究还不完善,在已有文献中相关成果并不多.文献[15]研究了非周期 QCSS 构造方法,利用有限域上的函数构造了几类参数渐进最优的非周期 QCSS,达到了[14]中提出的理论界.文献[16~19]分别提出了基于差集和几乎差集以及基于有限域上的加法和乘法特性等构造渐进最优和接近最优的周期 QCSS 方法.文献[20]提出了基于 LC-CSS 构造非周期 QCSS 的方法.文献[21]构造了多个序列长度为奇素数的 CCC 集合,并将多个 CCC 集组合从而生成渐进最优的非周期 QCSS.遗憾的是互补序列中子序列长度限制为奇素数.文献[22]提出了一类具有集间低相关性的 CCC 构造方法,包含文献[21]方法作为特殊情况,并得到了子序列长度为奇数的 QCSS.为了在多输入多输出(MIMO, Multiple Input Multiple Output)系统中实现天线间的正交性,文献[23]提出了一类三维互补码,该类互补码实质上属于具有良好组间性能的互补序列集.本文构造的多个具有集间低相关性的 CCC 集可以作为三维互补码的一个拓展,应用到 MIMO 系统中可以支持更多的用户.文献[24]提出了基于大容量准互补序列集的多载波码分多址通信系统(QCSS-MC-CDMA),并且引入球形译码算法进行解码,在瑞利选择性衰落信道模型下具有良好的性能,比传统 CCC-MC-CDMA 系统可容纳更多的通信用户.

本文提出了两种具有集间低相关性多个 CCC 集的构造方法.相比较于文献[21],本文提出的两种方法互补序列中子序列长度不限于奇素数,可以得到子序列长度为奇合数的互补序列.作为文献[22]构造方法的

补充,本文提出的两种新的构造方法生成的多个 CCC 集应用在多个小区的 MC-CDMA 通信系统中时,消除小区内干扰的同时,抑制小区间干扰.并且将多个 CCC 集合并可以得到一个参数渐进几乎最优的非周期准互补序列集,应用到 QCSS-MC-CDMA 系统中可以作为用户扩频码来进行干扰抑制.

2 基本概念

定义 1 令 $\mathbf{a} = (a_0, a_1, \dots, a_{N-1})$ 和 $\mathbf{b} = (b_0, b_1, \dots, b_{N-1})$ 为两个长度为 N 的复值序列,则 \mathbf{a}, \mathbf{b} 间的非周期相关函数定义如下:

$$\tilde{R}_{\mathbf{a}, \mathbf{b}}(\tau) = \begin{cases} \sum_{t=0}^{N-1-\tau} a_t b_{t+\tau}^*, & 0 \leq \tau \leq N-1 \\ \sum_{t=0}^{N-1+\tau} a_{t-\tau} b_t^*, & -N+1 \leq \tau < 0 \end{cases} \quad (1)$$

其中 b_t^* 表示 b_t 的复共轭.当 $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ 时,上述定义为非周期自相关函数,当 $\mathbf{a} \neq \mathbf{b}$ 时定义为非周期互相关函数.

定义集合 $C = \{C^0, C^1, \dots, C^{K-1}\}$ 包含 K 个互补序列,其中每个互补序列 C^k 都是由 M 个长度为 N 的子序列组成,为了方便理解,本文依照文献[8],将互补序列表示为二维矩阵形式如下:

$$C^k = \begin{bmatrix} C^{(k,0)} \\ C^{(k,1)} \\ \vdots \\ C^{(k,M-1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_0^{(k,0)} & c_1^{(k,0)} & \dots & c_{N-1}^{(k,0)} \\ c_0^{(k,1)} & c_1^{(k,1)} & \dots & c_{N-1}^{(k,1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_0^{(k,M-1)} & c_1^{(k,M-1)} & \dots & c_{N-1}^{(k,M-1)} \end{bmatrix} \quad (2)$$

其中,每一个行向量 $C^{(k,m)}$, $0 \leq k \leq K-1, 0 \leq m \leq M-1$ 表示互补序列 C^k 的第 m 个子序列.

设 $C^{k_1}, C^{k_2} \in C$, 其中, $0 \leq k_1, k_2 \leq K-1$. 互补序列 C^{k_1} 和 C^{k_2} 间的非周期相关函数为其子序列非周期相关和,其定义式如下:

$$\tilde{R}_{C^{k_1}, C^{k_2}}(\tau) = \sum_{m=0}^{M-1} \tilde{R}_{C^{(k_1,m)}, C^{(k_2,m)}}(\tau) \quad (3)$$

最大异相非周期自相关函数幅度值 δ_a 和最大非周期互相关函数幅度值 δ_c 分别定义如下:

$$\delta_a = \max \left\{ \left| \tilde{R}_{C^k, C^k}(\tau) \right| : 0 \leq k \leq K-1, 1 \leq \tau \leq N-1 \right\}$$

$$\delta_c = \max \left\{ \left| \tilde{R}_{C^{k_1}, C^{k_2}}(\tau) \right| : 0 \leq k_1 \neq k_2 \leq K-1, 0 \leq \tau \leq N-1 \right\}$$

$\delta_{\max} = \max \{ \delta_a, \delta_c \}$ 表示最大相关函数旁瓣幅度值.

下面给出准互补序列集的定义.

定义 2 对于集合 $C = \{C^0, C^1, \dots, C^{K-1}\}$, 若对于 $0 \leq \tau \leq N-1, k_1 \neq k_2$ 和 $0 < \tau \leq N-1, k_1 = k_2$ 有下面式(4)成立.

$$\left| \tilde{R}_{C^{k_1}, C^{k_2}}(\tau) \right| \leq \delta_{\max} \quad (4)$$

则可将序列集 C 定义为 (K, M, N, δ_{\max}) -QCSS, 其中 K 表示互补序列数目, M 表示每个互补序列子序列数目, N 表示子序列长度, 特别地, 当 $K = M, \delta_{\max} = 0$ 时, 称 C 为完全互补码集, 其参数可以表示为 (K, K, N) -CCC.

本文为了评估 QCSS 相关性能的优劣, 引理 1 和引理 2 引入了 δ_{\max} 的相关下界.

引理 1^[25] 对于一个参数为 (K, M, N, δ_{\max}) -QCSS, 其相关函数旁瓣幅度值 δ_{\max} 满足下式

$$\delta_{\max} \geq MN \sqrt{\frac{\left(\frac{K}{M} - 1\right)}{K(2N - 1) - 1}} \quad (5)$$

针对 $K \geq 3M, M \geq 2$ 及 $N \geq 2$ 的情况, 文献[14]提出了非周期 QCSS 参数更加紧密的相关下界, 如以下引理所示.

引理 2^[14] 当 $K \geq 3M, M \geq 2$ 及 $N \geq 2$ 时, 非周期 (K, M, N, δ_{\max}) -QCSS 相关函数旁瓣幅度值 δ_{\max} 满足下式

$$\delta_{\max} \geq \sqrt{MN(1 - 2\sqrt{\frac{M}{3K}})} \quad (6)$$

本文中, 若 δ_{\max} 达到式(5)或式(6)的下界, 则称该 QCSS 的相关性是最优的, 为了便于分析 QCSS 的相关性能, 定义最优因子 ρ 如下:

当 $K \geq 3M$ 情况时最优因子 ρ 定义为

$$\rho = \frac{\delta_{\max}}{\sqrt{MN(1 - 2\sqrt{\frac{M}{3K}})}} \quad (7)$$

当 $K < 3M$ 情况时最优因子 ρ 定义为

$$\rho = \frac{\delta_{\max}}{MN \sqrt{\frac{\left(\frac{K}{M} - 1\right)}{K(2N - 1) - 1}}} \quad (8)$$

最优因子 $\rho \geq 1$, 当 QCSS 的最优因子 $\rho = 1$ 时, 称其为最优的, 当 $1 < \rho \leq 2$ 时, 称其为近似最优的.

3 集间低相关性完全互补码集的构造

本节提出了两种构造多个参数为 (N, N, N) -CCC 完全互补码集的方法, 且都具有集间低相关性.

3.1 构造法 1

令 p, q 为任意两个奇素数且 $p < q, N = pq, K = p - 1. \mathbb{Z}_N$ 表示整数集合 $\{0, 1, \dots, N - 1\}, \omega_N = e^{\frac{2\pi j}{N}}$ 表示单位圆 N 次复数根, $j = \sqrt{-1}$ 为单位复根, 定义 N 个互补序列 $C^k = \{C^{(k,0)}, C^{(k,1)}, \dots, C^{(k,N-1)}\}, 0 \leq k \leq K - 1,$

$$C^{(k,m)} = \begin{bmatrix} C_0^{(k,m)} \\ C_1^{(k,m)} \\ \vdots \\ C_{N-1}^{(k,m)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{0,0}^{(k,m)} & c_{0,1}^{(k,m)} & \cdots & c_{0,N-1}^{(k,m)} \\ c_{1,0}^{(k,m)} & c_{1,1}^{(k,m)} & \cdots & c_{1,N-1}^{(k,m)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{N-1,0}^{(k,m)} & c_{N-1,1}^{(k,m)} & \cdots & c_{N-1,N-1}^{(k,m)} \end{bmatrix} \quad (9)$$

互补序列中的每个元素定义为

$$c_{n,t}^{(k,m)} = \omega_N^{f_n^{(k,m)}(t)} \quad (10)$$

其中,

$$f_n^{(k,m)}(t) = n\xi_k(t) + mt \pmod{N} \quad (11)$$

$$\xi_k(t) = q \langle (k+1)t \rangle_p + \langle (k+1)t \rangle_q \quad (12)$$

其中, $0 \leq n, m, t \leq N - 1, \langle (k+1)t \rangle_p$ 表示 $(k+1)t$ 模 p 运算的值. $\xi_k(t)$ 表示 \mathbb{Z}_N 上的置换集, 满足在 \mathbb{Z}_N 上对于任意参数 $a \in \mathbb{Z}_N, c \in \mathbb{Z}_N \setminus \{0, 1\}, \xi_k(t+a) = c\xi_k(t) \pmod{N}$ 有唯一解.

构造法 1 给出了一种利用置换集 $\xi_k(t)$ 构造 K 个具有集间低相关性的完全互补码集的方法. 构造法 1 得到的序列集性质由下面定理保证.

定理 1 由上述构造法 1 得到的互补序列集 $C^k, 0 \leq k \leq K - 1,$ 具有如下性质:

(1) 每个序列集 C^k 都是一个参数为 (N, N, N) -CCC 的完全互补码集.

(2) 不同序列集间具有低相关性, 即对于所有的 $0 \leq \tau \leq N - 1, k_1 \neq k_2 \in \mathbb{Z}_{K-1}$ 及 $0 \leq m_1, m_2 \leq N - 1,$ 有式(13)成立:

$$\left| \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{R}_{c_n^{(k_1, m_1)}, c_n^{(k_2, m_2)}}(\tau) \right| \leq N \quad (13)$$

证明 首先证明定理 1 的第一部分, 令 $C^{(k, m_1)}, C^{(k, m_2)} \in C^k,$ 其中 $0 \leq k < K, 0 \leq m_1, m_2 \leq N - 1,$ $C^{(k, m_1)}$ 和 $C^{(k, m_2)}$ 间的非周期相关计算如下:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{R}_{c_n^{(k, m_1)}, c_n^{(k, m_2)}}(\tau) \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{t=0}^{N-1-\tau} c_{n,t}^{(k, m_1)} \cdot (c_{n,t+\tau}^{(k, m_2)})^* \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{t=0}^{N-1-\tau} \omega_N^{f_n^{(k, m_1)}(t)} \cdot \omega_N^{-f_n^{(k, m_2)}(t+\tau)} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{t=0}^{N-1-\tau} \omega_N^{n(\xi_k(t) - \xi_k(t+\tau)) + t(m_1 - m_2) - m_2 \cdot \tau} \end{aligned} \quad (14)$$

分以下四种情况分析:

(1) 当 $m_1 = m_2, \tau = 0$ 时, 显然有

$$\sum_{n=0}^{N-1} \tilde{R}_{c_n^{(k, m_1)}, c_n^{(k, m_2)}}(0) = N^2 \quad (15)$$

(2) 当 $m_1 = m_2, 1 \leq \tau \leq N - 1$ 时, 在这种情况下

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{R}_{c_n^{(k, m_1)}, c_n^{(k, m_2)}}(\tau) \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{t=0}^{N-1-\tau} \omega_N^{-m_2 \cdot \tau} \omega_N^{n(\xi_k(t) - \xi_k(t+\tau))} \end{aligned}$$

$$= \omega_N^{-m_2 \cdot \tau} \cdot \sum_{t=0}^{N-1-\tau} \sum_{n=0}^{N-1} \omega_N^{n(\xi_k(t) - \xi_k(t+\tau))}$$

$$= 0 \tag{16}$$

在式(16)中,令 $\langle \xi_k(t) - \xi_k(t + \tau) \rangle_N = \langle c + qd \rangle_{pq}$,其中, $c = \langle (k+1)t \rangle_q - \langle (k+1)(t + \tau) \rangle_q$, $d = \langle (k+1)t \rangle_p - \langle (k+1)(t + \tau) \rangle_p$,若 $c = 0$,则表示 $\langle \tau \rangle_q = 0$,然而在 $\langle \tau \rangle_q = 0$ 时 $d \neq 0$. 因此,对于任意 $0 \leq t \leq N-1$, $1 \leq \tau \leq N-1$, $\langle \xi_k(t) - \xi_k(t + \tau) \rangle_N \neq 0$,因此,等式(16)成立.

(3) 当 $m_1 \neq m_2, \tau = 0$ 时

$$\sum_{n=0}^{N-1} \tilde{R}_{C_n^{(k_1, m_1)}, C_n^{(k_2, m_2)}}(0) = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{t=0}^{N-1-\tau} \omega_N^{t(m_1 - m_2)} = 0 \tag{17}$$

(4) 当 $m_1 \neq m_2, 1 \leq \tau \leq N-1$ 时

$$\sum_{n=0}^{N-1} \tilde{R}_{C_n^{(k_1, m_1)}, C_n^{(k_2, m_2)}}(\tau) = \sum_{t=0}^{N-1} \omega_N^{t \cdot (m_1 - m_2) - m_2 \tau} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} \omega_N^{n \cdot (\xi_k(t) - \xi_k(t + \tau))}$$

$$= 0 \tag{18}$$

由情况(2)分析,对于任意 $0 \leq t \leq N-1-\tau$, $1 \leq \tau \leq N-1$, $\langle \xi_k(t) - \xi_k(t + \tau) \rangle_N \neq 0$,所以等式(18)成立.

上述四种情况证明了由构造法1构造每个序列集 C^k 都是一个参数为 (N, N, N) -CCC 的完全互补码集.

下面证明定理1的第二部分,令 $C^{(k_1, m_1)} \in C^{k_1}$, $C^{(k_2, m_2)} \in C^{k_2}$,其中, $k_1 \neq k_2, 0 \leq m_1, m_2 \leq N-1$,则计算 $C^{(k_1, m_1)}$ 和 $C^{(k_2, m_2)}$ 间的非周期相关如下:

$$\sum_{n=0}^{N-1} \tilde{R}_{C_n^{(k_1, m_1)}, C_n^{(k_2, m_2)}}(\tau)$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{t=0}^{N-1-\tau} c_{n,t}^{(k_1, m_1)} \cdot (c_{n,t+\tau}^{(k_2, m_2)})^*$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{t=0}^{N-1-\tau} \omega_N^{f_n^{(k_1, m_1)}(t)} \cdot \omega_N^{-f_n^{(k_2, m_2)}(t+\tau)}$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{t=0}^{N-1-\tau} \omega_N^{n(\xi_{k_1}(t) - \xi_{k_2}(t+\tau)) + t(m_1 - m_2) - m_2 \cdot \tau}$$

$$= \sum_{t=0}^{N-1-\tau} \omega_N^{t(m_1 - m_2) - m_2 \tau} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} \omega_N^{n(\xi_{k_1}(t) - \xi_{k_2}(t+\tau))} \tag{19}$$

令 $\langle t \rangle_q = t_1, \langle t \rangle_p = t_2, \langle \tau \rangle_q = \tau_1, \langle \tau \rangle_p = \tau_2, \langle \xi_{k_1}(t) - \xi_{k_2}(t + \tau) \rangle_N = \langle c + qd \rangle_{pq}$,其中, $c = \langle (k_1 + 1)t_1 \rangle_q - \langle (k_2 + 1)(t_1 + \tau_1) \rangle_q, d = \langle (k_1 + 1)t_2 \rangle_p - \langle (k_2 + 1)(t_2 + \tau_2) \rangle_p$.

(1) 因为 $\langle k_1 - k_2 \rangle_q \neq 0$,对于 $0 \leq \tau_1 < q$,存在一个解 $0 \leq t_1 < q$,满足 $\langle c \rangle_q = \langle (k_1 - k_2)t_1 - (k_2 + 1)\tau_1 \rangle_q = 0$,因此,对于 $0 \leq \tau_1 < q$ 和 $0 \leq \tau_2 < p$,存在一个解 $0 \leq t_1 < q$ 使得 $c = 0$.

(2) 因为 $\langle k_1 - k_2 \rangle_q \neq 0$,对于 $0 \leq \tau_2 < p$,存在一

个解 $0 \leq t_2 < p$,满足 $\langle d \rangle_p = \langle (k_1 - k_2)t_2 - (k_2 + 1)\tau_2 \rangle_p = 0$,因此,对于 $0 \leq \tau_1 < q$ 和 $0 \leq \tau_2 < p$,存在一个解 $0 \leq t_2 < p$ 使得 $d = 0$.

结合以上两种情况讨论,对于 $0 \leq \tau < N, 0 \leq k_1 \neq k_2 < K$,存在一个解 $0 \leq t' < N$,满足 $\langle \xi_{k_1}(t') - \xi_{k_2}(t' + \tau) \rangle_N = 0$,当 $t' \notin \mathbb{Z}_{N-\tau}$ 时,因为

$$\sum_{n=0}^{N-1} \omega_N^{n(\xi_{k_1}(t') - \xi_{k_2}(t' + \tau))} = 0$$

所以 $\sum_{n=0}^{N-1} \tilde{R}_{C_n^{(k_1, m_1)}, C_n^{(k_2, m_2)}}(\tau) = 0$,当 $t' \in \mathbb{Z}_{N-\tau}$ 时,则有

$$\sum_{n=0}^{N-1} \tilde{R}_{C_n^{(k_1, m_1)}, C_n^{(k_2, m_2)}}(\tau)$$

$$= \omega_N^{-m_2 \tau} \cdot [\omega_N^{(m_1 - m_2) \cdot t'} \cdot N + \sum_{\substack{0 \leq t \leq N-1-\tau, \\ t \neq t'}} \omega_N^{(m_1 - m_2) \cdot t} \cdot \sum_{\substack{0 \leq n \leq N-1}} \omega_N^{n(\xi_{k_1}(t) - \xi_{k_2}(t + \tau))}]$$

$$= \omega_N^{-m_2 \tau + (m_1 - m_2)t'} \cdot N \tag{20}$$

对于任意 $0 \leq \tau < N, k_1 \neq k_2$,及 $0 \leq m_1, m_2 \leq N-1$,

有 $|\sum_{n=0}^{N-1} \tilde{R}_{C_n^{(k_1, m_1)}, C_n^{(k_2, m_2)}}(\tau)| \leq N$. 因此,定理1成立.

3.2 构造法2

令 p, q 为任意两个奇素数且 $p \leq q, 1 < u < p, N = pq, K = p - 1$. \mathbb{Z}_N 表示整数集合 $\{0, 1, \dots, N-1\}$, $\omega_N = e^{\frac{2\pi j}{N}}$ 表示单位圆 N 次复数根, $j = \sqrt{-1}$ 为单位复根,定义 N 个互补序列集 $C^k = \{C^{(k,0)}, C^{(k,1)}, \dots, C^{(k,N-1)}\}, 0 \leq k \leq K-1$,

$$C^{(k,m)} = \begin{bmatrix} C_{0,0}^{(k,m)} \\ C_{1,0}^{(k,m)} \\ \vdots \\ C_{N-1,0}^{(k,m)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{0,0}^{(k,m)} & C_{0,1}^{(k,m)} & \dots & C_{0,N-1}^{(k,m)} \\ C_{1,0}^{(k,m)} & C_{1,1}^{(k,m)} & \dots & C_{1,N-1}^{(k,m)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{N-1,0}^{(k,m)} & C_{N-1,1}^{(k,m)} & \dots & C_{N-1,N-1}^{(k,m)} \end{bmatrix} \tag{21}$$

互补序列中的每个元素定义为

$$c_{n,t}^{(k,m)} = \omega_N^{f_n^{(k,m)}(t)} \tag{22}$$

$$f_n^{(k,m)}(t) = n\xi_k(t) + mt \pmod{N} \tag{23}$$

$$\xi_k(t) = (k+1)(\langle t \rangle_q + uq \lfloor \frac{t}{q} \rfloor) \tag{24}$$

其中, $0 \leq n, m, t \leq N-1, 1 < u < p, \langle t \rangle_q$ 表示 t 模 q 运算的值, $\lfloor \frac{t}{q} \rfloor$ 表示 $\frac{t}{q}$ 向下取整的值. $\xi_k(t)$ 表示 \mathbb{Z}_N 上的置换集,满足在 \mathbb{Z}_N 上对于任意参数 $a \in \mathbb{Z}_N, c \in \mathbb{Z}_N \setminus \{0, 1\}$, $\xi_k(t+a) = c\xi_k(t) \pmod{N}$ 有唯一解.

与构造法1不同的是,式(24)所示的置换集 $\xi_k(t)$ 允许奇素数 p 和 q 相等,因此构造法2构造的 K 个完全互补码集具有新的参数. 其性质及证明过程如定理2所示.

定理2 由上述构造法2得到的互补序列集 $C^k, 0 \leq$

$k \leq K - 1$, 具有如下性质:

(1) 每个序列集 C^k 都是一个参数为 $(N, N, N) - CCC$ 的完全互补码集.

(2) 不同序列集具有低相关性, 对于所有的 $0 \leq \tau \leq N - 1, k_1 \neq k_2 \in \mathbb{Z}_{K-1}$ 及 $0 \leq m_1, m_2 \leq N - 1$, 有式 (25) 成立:

$$\left| \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{R}_{c_n^{(k_1, m_1)}, c_n^{(k_2, m_2)}}(\tau) \right| \leq N \quad (25)$$

证明 首先证明定理 2 的第一部分, 令 $C^{(k, m_1)}$,

$C^{(k, m_2)} \in C^k$, 其中 $0 \leq k \leq K - 1, 0 \leq m_1, m_2 \leq N - 1$,

$C^{(k, m_1)}$ 和 $C^{(k, m_2)}$ 间的非周期相关计算如下:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{R}_{c_n^{(k, m_1)}, c_n^{(k, m_2)}}(\tau) \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{t=0}^{N-1-\tau} c_{n,t}^{(k, m_1)} \cdot (c_{n,t+\tau}^{(k, m_2)})^* \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{t=0}^{N-1-\tau} \omega_N^{f_n^{(k, m_1)}(t)} \cdot \omega_N^{-f_n^{(k, m_2)}(t+\tau)} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{t=0}^{N-1-\tau} \omega_N^{n(\xi_k(t) - \xi_k(t+\tau)) + t(m_1 - m_2) - m_2 \cdot \tau} \end{aligned} \quad (26)$$

分以下四种情况分析:

(1) 当 $m_1 = m_2, \tau = 0$ 时, 显然有

$$\sum_{n=0}^{N-1} \tilde{R}_{c_n^{(k, m_1)}, c_n^{(k, m_2)}}(0) = N^2 \quad (27)$$

(2) 当 $m_1 = m_2, 1 \leq \tau \leq N - 1$ 时, 在这种情况下

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{R}_{c_n^{(k, m_1)}, c_n^{(k, m_2)}}(\tau) \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{t=0}^{N-1-\tau} \omega_N^{-m_2 \cdot \tau} \omega_N^{n(\xi_k(t) - \xi_k(t+\tau))} \\ &= \omega_N^{-m_2 \cdot \tau} \cdot \sum_{t=0}^{N-1-\tau} \sum_{n=0}^{N-1} \omega_N^{n(\xi_k(t) - \xi_k(t+\tau))} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (28)$$

在式 (28) 中令 $\langle \xi_k(t) - \xi_k(t + \tau) \rangle_N = (c + u \cdot qd)$ 其

中 $c = \langle t \rangle_q - \langle t + \tau \rangle_q, d = \left\lfloor \frac{t}{q} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{t + \tau}{q} \right\rfloor_p$, 若 $d = \left\lfloor \frac{t}{q} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{t + \tau}{q} \right\rfloor_p = 0$, 则表示 $0 < \tau < q$, 然而当 $0 < \tau < q$ 时 $c = \langle t \rangle_q - \langle t + \tau \rangle_q \neq 0$. 因此对于任意 $0 \leq t \leq N - 1 - \tau, 1 \leq \tau \leq N - 1, \langle \xi_k(t) - \xi_k(t + \tau) \rangle_N \neq 0$ 等式 (28) 成立.

(3) 当 $m_1 \neq m_2, \tau = 0$ 时

$$\sum_{n=0}^{N-1} \tilde{R}_{c_n^{(k, m_1)}, c_n^{(k, m_2)}}(0) = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{t=0}^{N-1-\tau} \omega_N^{t(m_1 - m_2)} = 0 \quad (29)$$

(4) 当 $m_1 \neq m_2, 1 \leq \tau \leq N - 1$ 时

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{R}_{c_n^{(k_1, m_1)}, c_n^{(k_2, m_2)}}(\tau) &= \sum_{t=0}^{N-1} \omega_N^{t \cdot (m_1 - m_2) - m_2 \tau} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} \omega_N^{n \cdot (\xi_k(t) - \xi_k(t + \tau))} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (30)$$

由情况 (2) 分析, 对于任意 $0 \leq t \leq N - 1 - \tau, 1 \leq \tau \leq N - 1, \langle \xi_k(t) - \xi_k(t + \tau) \rangle_N \neq 0$, 所以等式 (30) 成立.

上述四种情况证明了由构造法 2 构造每个序列集 C^k 都是一个参数为 $(N, N, N) - CCC$ 的完全互补码集.

下面证明定理 2 的第二部分, 令 $C^{(k_1, m_1)} \in C^{k_1}, C^{(k_2, m_2)} \in C^{k_2}$, 其中, $k_1 \neq k_2, 0 \leq m_1, m_2 \leq N - 1$, 则计算 $C^{(k_1, m_1)}$ 和 $C^{(k_2, m_2)}$ 间的非周期相关如下:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{R}_{c_n^{(k_1, m_1)}, c_n^{(k_2, m_2)}}(\tau) \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{t=0}^{N-1-\tau} c_{n,t}^{(k_1, m_1)} \cdot (c_{n,t+\tau}^{(k_2, m_2)})^* \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{t=0}^{N-1-\tau} \omega_N^{f_n^{(k_1, m_1)}(t)} \cdot \omega_N^{-f_n^{(k_2, m_2)}(t+\tau)} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{t=0}^{N-1-\tau} \omega_N^{n(\xi_{k_1}(t) - \xi_{k_2}(t+\tau)) + t(m_1 - m_2) - m_2 \cdot \tau} \\ &= \sum_{t=0}^{N-1-\tau} \omega_N^{t(m_1 - m_2) - m_2 \tau} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} \omega_N^{n(\xi_{k_1}(t) - \xi_{k_2}(t+\tau))} \end{aligned} \quad (31)$$

令 $\langle t \rangle_q = t_1, \left\lfloor \frac{t}{q} \right\rfloor = t_2, \langle \tau \rangle_q = \tau_1, \left\lfloor \frac{\tau}{q} \right\rfloor = \tau_2, \varepsilon = \left\lfloor \frac{t_1 + \tau_1}{q} \right\rfloor$, 有 $\langle \xi_{k_1}(t) - \xi_{k_2}(t + \tau) \rangle_N = \langle c + uqd \rangle_{pq}$, 其中, $c = (k_1 + 1)t_1 - (k_2 + 1)\langle t_1 + \tau_1 \rangle_q, d = (k_1 + 1)t_2 - (k_2 + 1)\langle t_2 + \tau_2 + \varepsilon \rangle_p$.

(1) 因为 $\langle k_1 - k_2 \rangle_q \neq 0$, 对于 $0 \leq \tau_1 < q$, 存在一个解 $0 \leq t_1 < q$, 满足 $\langle c \rangle_q = \langle (k_1 - k_2)t_1 - (k_2 + 1)\tau_1 \rangle_q = 0$, 因此, 对于 $0 \leq \tau_1 < q$ 和 $0 \leq \tau_2 < p$, 其中, $0 < k_1 + 1, k_2 + 1 < p$, 存在一个解 $0 \leq t_1 < q$ 使得 $c = 0$.

(2) 因为 $\langle k_1 - k_2 \rangle_p \neq 0$, 对于 $0 \leq \tau_2 < p$, 存在一个解 $0 \leq t_2 < p$, 满足 $\langle d \rangle_p = \langle (k_1 - k_2)t_2 - (k_2 + 1)(\tau_2 + \varepsilon) \rangle_p = 0$, 因此, 对于 $0 \leq \tau_1 < q$ 和 $0 \leq \tau_2 < p$, 其中 $0 < k_1 + 1, k_2 + 1 < p$, 存在一个解 $0 \leq t_2 < p$ 使得 $d = 0$.

结合以上两种情况讨论, 对于 $0 \leq \tau < N, 0 \leq k_1 \neq k_2 < K$, 存在一个解 $0 \leq t' < N$ 满足 $\langle \xi_{k_1}(t') - \xi_{k_2}(t' + \tau) \rangle_N = 0$. 当 $t' \notin \mathbb{Z}_{N-\tau}$ 时, 因为

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{N-1} \omega_N^{n(\xi_{k_1}(t') - \xi_{k_2}(t' + \tau))} &= 0, \text{ 所以有 } \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{R}_{c_n^{(k_1, m_1)}, c_n^{(k_2, m_2)}}(\tau) = 0, \text{ 当} \\ & t' \in \mathbb{Z}_{N-\tau} \text{ 时, 则有} \\ \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{R}_{c_n^{(k_1, m_1)}, c_n^{(k_2, m_2)}}(\tau) & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \omega_N^{-m_2\tau} \cdot [\omega_N^{(m_1 - m_2) \cdot t'} \cdot N + \sum_{\substack{0 \leq t \leq N-1-\tau, \\ t \neq t'}} \omega_N^{(m_1 - m_2) \cdot t} \\
 &\quad \cdot \sum_{0 \leq n \leq N-1} \omega_N^{n(\xi_{k_1}(t) - \xi_{k_2}(t+\tau))}] \\
 &= \omega_N^{-m_2\tau + (m_1 - m_2)t'} \cdot N \tag{32}
 \end{aligned}$$

因此,对于任意 $0 \leq \tau < N, k_1 \neq k_2$, 及 $0 \leq m_1, m_2 \leq N - 1$, 有 $|\sum_{n=0}^{N-1} \tilde{R}_{c_n^{(k_1, m_1)}, c_n^{(k_2, m_2)}}(\tau)| \leq N$. 因此,定理2成立.

为了验证定理1和定理2的结果,下面给出一个构造法2的实例.

例1 令 $p = 3, q = 3, u = 2$, 则 $N = 9, K = 2$, 根据构造法2, 可求得 $\xi_0 = (0, 1, 2, 6, 7, 8, 3, 4, 5)$, $\xi_1 = (0, 2, 4, 3, 5, 7, 6, 8, 1)$. 可以得到2个 $(9, 9, 9)$ -CCC, C^{k_1}, C^{k_2} . 本例列出两个 CCC 的第一个互补序列, 矩阵中每个元素表示 ω_9 的幂次.

$$C^{(0,0)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 6 & 7 & 8 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 4 & 3 & 5 & 7 & 6 & 8 & 1 \\ 0 & 3 & 6 & 0 & 3 & 6 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 4 & 8 & 6 & 1 & 5 & 3 & 7 & 2 \\ 0 & 5 & 1 & 3 & 8 & 4 & 6 & 2 & 7 \\ 0 & 6 & 3 & 0 & 6 & 3 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 7 & 5 & 6 & 4 & 2 & 3 & 1 & 8 \\ 0 & 8 & 7 & 3 & 2 & 1 & 6 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

$$C^{(1,0)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 3 & 5 & 7 & 6 & 8 & 1 \\ 0 & 4 & 8 & 6 & 1 & 5 & 3 & 7 & 2 \\ 0 & 6 & 3 & 0 & 6 & 3 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 8 & 7 & 3 & 2 & 1 & 6 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 6 & 7 & 8 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 3 & 6 & 0 & 3 & 6 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 5 & 1 & 3 & 8 & 4 & 6 & 2 & 7 \\ 0 & 7 & 5 & 6 & 4 & 2 & 3 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

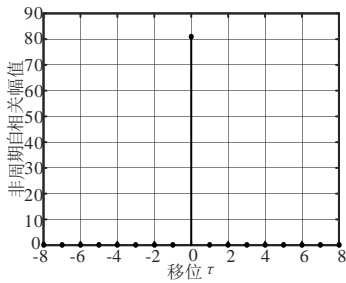


图1 $C^{(0,0)}$ 的非周期自相关幅值

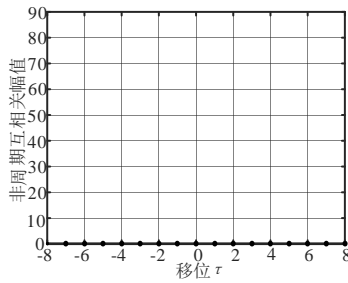


图2 $C^{(0,0)}$ 和 $C^{(1,0)}$ 的非周期互相关幅值

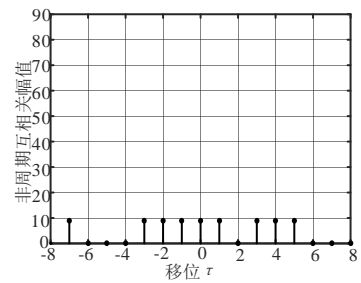


图3 $C^{(0,0)}$ 和 $C^{(1,0)}$ 的非周期互相关幅值

互补序列 $C^{(0,0)}$ 和 $C^{(1,0)}$ 相关函数幅值如上图所示, 通过图1和图2容易验证出互补序列集 C^0 中的非零时移自相关和及互相关和都为零, 满足定理2序列集 C^0 是一个参数为 $(9, 9, 9)$ -CCC 的完全互补码集的性质. 通过图3, 可以验证出对于任意 $0 \leq \tau < N, k_1 \neq k_2$, 及 $0 \leq m_1, m_2 \leq N - 1, C^{(k_1, m_1)}, C^{(k_2, m_2)}$ 间非周期相关函数幅度值小于等于9, 即小于等于互补序列中子序列长度9.

文献[26]提出了基于三维互补码的 MIMO 通信系统. 考虑到 MIMO 系统的空-时-频三维资源的特性, 本节提出的具有集间低相关性的多个 CCC 集可以作为三维互补码的推广, 应用到 MIMO 系统时将每个 CCC 集分配给一个多天线用户, 其中每个 CCC 集中完全互补码数目对应所支持的发送天线数目, 可以有效抵抗多径干扰, 抑制多址干扰, 实现同一用户不同天线发送的数据间的正交性.

4 构造渐进最优的 QCSS

本节利用第3节提出两种构造多个 CCC 集的方法及其集间低相关性构造出了渐进最优和接近最优的

QCSS, 具体的构造方法如以下定理所示.

定理3 令 $C = C^0 \cup C^1 \cup \dots \cup C^{p-2}$, 其中互补序列集 $C^k, 0 \leq k \leq p - 2$, 是由构造法1或构造法2构造而成的 CCC, 则序列集 C 是渐进或近似最优非周期 $((p - 1)N, N, N)$ -QCSS.

证明 由定理1和定理2可知, $C^k, 0 \leq k \leq p - 2$, 是含有 N 个互补序列的 CCC, 其集内互相关幅度为零. 任意两个不同的 $CCCC^{k_1}$ 和 C^{k_2} 的集间互相关幅度小于等于 N , 其中 $0 \leq k_1 \neq k_2 \leq K - 1$. 因此显然可以推断出 C 是一个参数为 (K, M, N, δ_{\max}) -QCSS 的非周期准互补序列集, 其中 $K = (p - 1)pq, M = pq, N = pq, \delta_{\max} = N$.

推论1 由定理3构造的非周期准互补序列集 (K, M, N, δ_{\max}) -QCSS, 当 $K < 3M$ 时, 也就是针对构造法1和构造法2中 $p = 3$ 的情况, 根据引理1所述的理论界, 准互补序列集是近似最优的, 且其参数为 $(2pq, pq, pq, pq)$ -QCSS.

证明 由引理1, 因为 $K < 3M$, 因此 (K, M, N, δ_{\max}) -QCSS 的最优因子为

$$\rho = \frac{pq}{(pq)^2 \sqrt{\frac{2pq}{2pq(2pq-1)-1}}} \quad (33)$$

当 $p = 3, q$ 趋于无穷时,可以得到

$$\begin{aligned} \lim_{q \rightarrow +\infty} \rho &= \lim_{q \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{(pq)^2}{4(pq)^2 - 2pq - 1}}} \\ &= \lim_{q \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{4 - \frac{2}{pq} - \frac{1}{(pq)^2}}} \\ &= 2 \end{aligned} \quad (34)$$

根据推论 1, 列出近似最优的非周期 QCSS 各项参数如表 1 所示.

表 1 近似最优 QCSSs 的参数

p, q 值	K	M	N	ρ
$p=3, q=3$	18	9	9	1.9405
$p=3, q=5$	30	15	15	1.9653
$p=3, q=7$	42	21	21	1.9755
$p=3, q=11$	66	33	33	1.9846
$p=3, q=17$	102	51	51	1.9901
$p=3, q=19$	114	57	57	1.9911
$p=3, q=23$	138	69	69	1.9927
$p=3, q=27$	582	291	291	1.9983
$p=3, q=137$	822	411	411	1.9988
$p=3, q=1999$	11994	5997	5997	1.9999
$p=3, q=3343$	20058	10029	10029	2.0000

推论 2 由定理 3 构造的参数为 (K, M, N, δ_{\max}) -QCSS 的非周期准互补序列集当 $K \geq 3M$ 时, 根据引理 2 所述的理论界, 准互补序列集是渐进最优的, 其参数为 $((p-1)pq, pq, pq, pq)$ -QCSS.

表 3 几类非周期 QCSS 构造

构造方法	K	M	N	δ_{\max}	字符集	参数限制
文献[20]定理 1	$q(q+1)$	q	q	q	\mathbb{Z}_q	q 是素数的幂次
文献[20]定理 3	q^2	q	$q-1$	q	\mathbb{Z}_q	$q \geq 5$ 是素数的幂次
文献[21]	$p(p-1)$	p	p	p	\mathbb{Z}_p	p 是奇素数
文献[22]	$N(p_0-1)$	N	N	N	\mathbb{Z}_N	$N \geq 3$ 为奇数, $N = p_0^{\epsilon_0} p_1^{\epsilon_1} \cdots p_{n-1}^{\epsilon_{n-1}}$, 其中 $p_0 < p_1 < \cdots < p_{n-1}$, 为 N 的素因子
本文定理 1	$(p-1)pq$	pq	pq	pq	\mathbb{Z}_{pq}	p, q 为奇素数且 $p < q$
本文定理 2	$(p-1)pq$	pq	pq	pq	\mathbb{Z}_{pq}	p, q 为奇素数且 $p \leq q$

5 结束语

本文提出了两类具有集间低相关性的 CCC 集构造方法, 在应用到多小区 MC-CDMA 通信系统中时可有

证明 证明方法类似推论 1, 由引理 2, 因为 $K \geq 3M$, 因此 (K, M, N, δ_{\max}) -QCSS 的最优因子为

$$\rho = \frac{pq}{\sqrt{(pq)^2 (1 - 2\sqrt{\frac{pq}{3pq(p-1)}})}} \quad (35)$$

当 p 趋近于无穷时, 可求得最优因子 ρ 为

$$\begin{aligned} \lim_{p \rightarrow +\infty} \rho &= \lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{pq}{\sqrt{(pq)^2 (1 - 2\sqrt{\frac{pq}{3pq(p-1)}})}} \\ &= \lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{(1 - 2\sqrt{\frac{1}{3(p-1)}})}} \\ &= 1 \end{aligned} \quad (36)$$

根据推论 2, 列出渐进最优的非周期 QCSS 各项参数如表 2 所示.

表 2 渐进最优 QCSSs 的参数

p, q 值	K	M	N	ρ
$p=5, q=5$	30	15	15	1.5382
$p=5, q=7$	42	21	21	1.5382
$p=7, q=7$	66	33	33	1.3754
$p=7, q=11$	78	39	39	1.3754
$p=11, q=13$	102	51	51	1.2551
$p=13, q=13$	114	57	57	1.2247
$p=13, q=17$	2652	221	221	1.2247
$p=19, q=23$	7866	437	437	1.1722
$p=79, q=83$	511446	6557	6557	1.0726
$p=101, q=103$	1040300	10403	10403	1.0633
$p=157, q=163$	3992196	25591	25591	1.0497

表 3 比较了目前已有的几类非周期 QCSS 的构造方法的参数从表 3 可知, 本文提出了两类准互补序列集新的构造方法, 并且参数达到渐进最优.

效消除小区内的干扰, 同时抑制小区间的干扰. 作为三维互补码的推广, 在面向多用户的 MIMO 系统中也可发挥着重要作用. 将多个互补码集合并则可得参数达

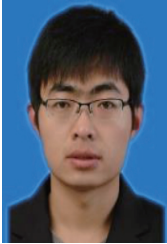
到渐进最优的非周期 QCSS. 该类 QCSS 中序列数目突破了传统正交互补序列集参数理论界限, 在支持海量用户同时入网的场景下的 MC-CDMA 系统中具有较大的应用潜力, 也为后续开展应用研究提供理论依据.

参考文献

- [1] GOLAY M J E. Static multislit spectrometry and its application to the panoramic display of infrared spectra[J]. *Journal of the Optical Society of America*, 1951, 41(7): 468 – 472.
- [2] TSENG C C, LIU C. Complementary sets of sequences[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 1972, 18(5): 644 – 652.
- [3] RATHINAKUMAR A, Chaturvedi A K. Complete mutually orthogonal Golay complementary sets from Reed-Muller codes[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2008, 54(3): 1339 – 1346.
- [4] ESMAEILI-NAJAFABADI H, ATAEI M, Sabahi M F. Designing sequence with minimum PSL using chebyshev distance and its application for chaotic MIMO radar waveform design[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2016, 65(3): 690 – 704.
- [5] LI S, WU H, JIN L. Channel estimation in time domain using complementary sequence[A]. CHEN Y F. *Conference Proceedings of 2017 3rd IEEE International Conference on Control Science and Systems Engineering*[C]. Beijing, China: IEEE Press, 2017. 474 – 477.
- [6] 张振宇, 曾凡鑫, 宣贵新. 适用于多天系统信道估计的周期互补多相码[J]. *解放军理工大学学报(自然科学版)*, 2012, 13(01): 17 – 21.
ZHANG ZHEN-yu, ZENG Fan-xin, XUAN Gui-xin. Periodic complementary multi-phase codes for channel estimation in multiple-antenna systems[J]. *Journal of PLA University of Science and Technology(Natural Science Edition)*, 2012, 13(01): 17 – 21. (in Chinese)
- [7] YU N Y, GONG G. Near-complementary sequences with low PMEPR for peak power control in multicarrier communications[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2011, 57(1): 505 – 513.
- [8] LIU Z, GUAN Y L, PARAMPALLI U. New complete complementary codes for peak-to-mean power control in multicarrier CDMA[J]. *IEEE Transactions on Communications*, 2014, 62(3): 1105 – 1113.
- [9] LIU Z, GUAN Y L, NG B C, et al. Correlation and set size bounds of complementary sequences with low correlation zone[J]. *IEEE Transactions on Communications*, 2011, 59(12): 3285 – 3289.
- [10] 史仍辉, 赵晓群, 李立志. 低相关区序列偶集的构造方法[J]. *信息与控制*, 2011, 40(06): 790 – 796.
SHI Reng-hui, ZHAO Xiao-qun, LI Li-zhi. Construction methods of low correlation zone sequence pairs set[J]. *Information and Control*, 2011, 40(06): 790 – 796. (in Chinese)
- [11] 李琦, 李鼎, 高军萍, 韩瑾, 赵洋. 零相关区屏蔽四元周期互补序列偶集设计研究[J]. *电子与信息学报*, 2016, 38(02): 318 – 324.
LI Qi, LI Ding, GAO Jun-ping, HAN Jin, ZHAO Yang. Design of zero correlation zone punctured quaternary periodic complementary sequence pairs sets[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2016, 38(02): 318 – 324. (in Chinese)
- [12] 李玉博, 许成谦, 刘凯. 一类四元零相关区非周期互补序列集构造法[J]. *电子学报*, 2015, 43(9): 1800 – 1804.
LI Yu-bo, XU Cheng-qian, LIU Kai. A construction of quaternary aperiodic complementary sequence sets with zero correlation zone[J]. *Acta Electronica Sinica*, 2015, 43(9): 1800 – 1804. (in Chinese)
- [13] 刘凯, 俞赛, 史洪印. 一类四元零相关区周期互补序列集[J]. *电子与信息学报*, 2014, 36(09): 2086 – 2092.
LIU Kai, YU Sai, SHI Hong-yin. A class of quaternary periodic complementary sequence sets with zero correlation zone[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2014, 36(09): 2086 – 2092. (in Chinese)
- [14] LIU Z, GUAN Y L, MOW W H. A tighter correlation lower bound for quasi-complementary sequence sets[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2014, 60(1): 388 – 396.
- [15] LIU Z, PARAMPALLI U, GUAN Y L, et al. Constructions of optimal and near-optimal quasi-complementary sequence sets from singer difference sets[J]. *IEEE Wireless Communication Letters*, 2013, 2(5): 487 – 490.
- [16] LI Y, TIAN L, LIU T, et al. Constructions of asymptotically optimal quasi-complementary sequence sets[J]. *IEEE Communications Letters*, 2018, 22(8): 1516 – 1519.
- [17] LI Y, YAN T, LV C. Construction of a near-optimal quasi-complementary sequence set from almost difference set[J]. *Cryptography and Communications*, 2019, 11(4): 815 – 814.
- [18] LI Y, TIAN L, LIU T, et al. Constructions of quasi-complementary sequence sets associated with characters[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2019, 65(7): 4597 – 4608.
- [19] LI Y, TIAN L, LIU T, et al. Two constructions of asymp-

- totically optimal quasi-complementary sequence sets[J]. IEEE Transactions on Communications, 2019, 67(3): 1910 – 1924.
- [20] LI Y, TIAN L, XU C. Constructions of asymptotically optimal aperiodic quasi-complementary sequence sets[J]. IEEE Transactions on Communications, 2019, 67(11): 7499 – 7511.
- [21] LIU T, XU C, LI Y. Multiple complementary sequence sets with low inter-set cross-correlation property[J]. IEEE Signal Processing Letters, 2019, 26(6): 913 – 917.
- [22] ZHOU Z, LIU F, ADHIKARY A R, et al. A generalized construction of multiple complete complementary codes and asymptotically optimal aperiodic quasi-complementary sequence sets[J]. IEEE Transactions on Communications, 2020, 68(6): 3564 – 3571.
- [23] SUN S Y, CHEN H H, MENG W X. A framework to construct three-dimensional complementary codes for multiuser MIMO systems[J]. IEEE Transactions on Vehicular Technology, 2014, 64(7): 2861 – 2874.
- [24] SAMAD A, MAJHI S. A near-optimal and low-complex joint multiuser detection for QCSS-MC-CDMA system[J]. IEEE Systems Journal, 2021, 15(2): 1594 – 1603.
- [25] WELCH L. Lower bounds on the maximum cross correlation of signals (corresp.)[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 1974, 20(3): 397 – 399.
- [26] SUN S, CHEN C W, CHU S W, et al. Multiuser-interference-free space-time spreading MIMO systems based on three-dimensional complementary codes[J]. IEEE Systems Journal, 2013, 9(1): 45 – 57.

作者简介



李玉博 男,1985年8月出生于河北衡水. 现为燕山大学副教授、硕士生导师. 主要研究方向为扩频序设计.
E-mail: liyubo6316@ysu.edu.cn



门鑫宇 男,1997年4月出生于河北唐山. 现为燕山大学硕士研究生. 主要研究方向为序列设计和编码理论.
E-mail: 634466017@qq.com



高印芝(通信作者) 女,1963年7月出生于河北衡水. 现为河北师范大学副教授. 主要研究方向为组合设计.
E-mail: gyinzhi701@sina.com



刘凯 女,1977年5月出生于辽宁沈阳. 现为燕山大学副教授、硕士生导师. 主要研究方向为序列设计、扩频通信、编码理论.
E-mail: liukai@ysu.edu.cn